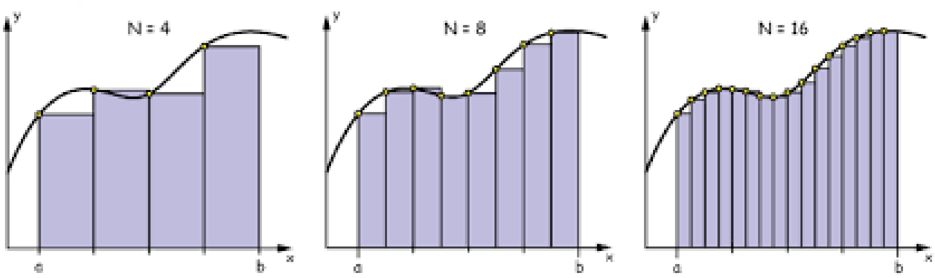
Ο ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΎΛΗΣ

Από το βιβλίο μου «τα απειροελάχιστα μεγέθη»

http://www.mpantes.gr/products.html

Το επόμενο πρόβλημα του Λάιμπνιτς μετά τις εφαπτόμενες των καμπύλων ήταν ο τετραγωνισμός των καμπύλων, δηλαδή η *εύρεση του εμβαδού που διαγράφεται κάτω από την καμπύλη.* Το πρόβλημα όπως θα δούμε είναι το αντίστροφο του προβλήματος της εφαπτομένης, δηλαδή τώρα



Ο τετραγωνισμός καμπύλης ως άθροισμα εμβαδών

πρέπει να βρούμε μια καμπύλη με έναν δεδομένο νόμο καμπυλότητας.

Η ιδέα ήταν η εξής: Όπως βλέπουμε στο σχήμα, το άθροισμα των εμβαδών των κατακόρυφων ζωνών θα είναι μια προσέγγιση του εμβαδού κάτω από την καμπύλη, η οποία θα είναι τόσο ακριβέστερη όσο «*λεπτότερες*» γίνονται οι ζώνες. Η ιδανική προσέγγιση θα γίνει με τα απειροστά. Αν οι βάσεις των ζωνών γίνουν dx, οι επάνω πλευρές των καμπυλόγραμμων τετραπλεύρων γίνονται απειροστά ευθύγραμμα τμήματα και το κάθε καμπυλόγραμμο τετράπλευρο τείνει να γίνει ένα «μικροσκοπικό» ορθογώνιο με απειροστό εμβαδόν f(x).dx, (βάση επί ύψος, το απλούστερο πρόβλημα του μοντέλου).

Ο Λάιμπνιτς χρησιμοποιώντας το σύμβολο ∫ το οποίο αντιπροσωπεύει το άθροισμα άπειρων σε πλήθος μηκών (το dx είναι το άπειρο μικρό), το ∫dx συμβολίζει το άπειρο άθροισμα όλων των απειροελάχιστων τμημάτων μήκους dx δηλαδή είναι $\int dx = x$

Το ολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη y, το άθροισμα δηλαδή των άπειρων απειροελάχιστων ydx, ο Λάιμπνιτς το συμβολίζει με το ∫f(x)dx (το άπειρο άθροισμα) και είναι ένας αριθμός. Ο συμβολισμός αυτός επέτρεψε το Λάιμπνιτς να εκφράσει συνοπτικά επιφάνειες π.χ θα έγραφε $\int x^2 dx$ για να αναφερθεί στο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y=x^2$. Η λέξη ολοκλήρωση μπήκε στο μαθηματικό λεξιλόγιο την ίδια περίπου εποχή, αντί του τετραγωνισμού, ως ένδειξη υπολογισμού επιφανειών. Το σύμβολο ∫ έγινε γνωστό ως ολοκλήρωμα.

Πως όμως θα υπολογίζονταν αυτό το άπειρο άθροισμα των μικροσκοπικών ορθογωνίων, δηλαδή το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη;

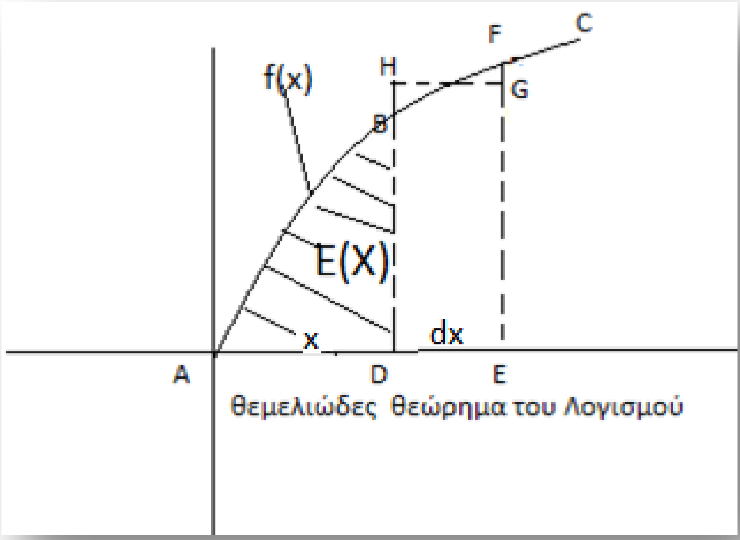
Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού

Αυτό συνέβη με την ανακάλυψη της σχέσης ανάμεσα στον τετραγωνισμό και στην γνωστή μας κλίση της καμπύλης (στο ολοκλήρωμα και την παράγωγο μιας συνάρτησης). Η σύνδεση αυτή έγινε ανεξάρτητα από τον Νεύτωνα στην Αγγλία και το Λάιμπνιτς στη Γερμανία, γι' αυτό τιμούμε και τους δύο ως εφευρέτες του Απειροστικού λογισμού.

Ο Νεύτων του οποίου η πορεία είναι απλούστερη, προχώρησε ως εξής: δοθείσης μιας καμπύλης ABC και μιας μικροσκοπικής μεταβολής DE στον οριζόντιο άξονα, τότε μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο DEGH με την ίδια επιφάνεια DEFB όπως στο παρακάτω σχήμα. Έτσι η μικροσκοπική μεταβολή στο εμβαδόν της περιοχής ADB ισούται DEGH η οποία ισούται με DH.DE . Επειδή η DE είναι μικροσκοπική μεταβολή κατά μήκος του οριζόντιου άξονα, έχουμε

DH=(μεταβολή του εμβαδού ADB)/(μεταβολή της τετμημένης DE) (1)

Ας θεωρήσουμε το σημείο D σταθερό και το σημείο E να πλησιάζει όλο και περισσότερο σε αυτό. Καθώς το DE γίνεται «άπειρα μικρό», το DH γίνεται ίσο με το DB. Αυτές οι παρατηρήσεις μας επιτρέπουν να μεταφράσουμε την (1) ως DB =ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ADB στο σημείο D . Αλλά η DB είναι η τεταγμένη της καμπύλης στο D κι έτσι ο Νεύτων αποκάλυψε μια σχέση ανάμεσα στην καμπύλη, στον τετραγωνισμό της και στο ρυθμό μεταβολής του τετραγωνισμού της , ειδικότερα:



“το ύψος μιας καμπύλης, f(x) σε ένα σημείο x του οριζόντιου άξονα ισούται με το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της καμπύλης το Ε΄(x) στο σημείο αυτό (η μαγική απόδειξη του Νεύτωνα βρίσκεται στο Calculus and its origins σελ.78, David Perkins). Στη συνέχεια για να δείξει ότι μπορούμε να εναλλάσσουμε το εμβαδόν και το ρυθμό μεταβολής φτάνοντας σε όμοιες αλήθειες δείχνει και την πρόταση: «το ύψος μιας καμπύλης σε ένα σημείο χ του οριζόντου άξονα ισούται με το εμβαδόν του ρυθμού μεταβολής της καμπύλης στο δοθέν σημείο.» Οι δύο αυτές προτάσεις αποκαλύπτουν μια αντίστροφη σχέση μεταξύ του εμβαδού και του ρυθμού μεταβολής

Αν Ε(x) είναι ο τετραγωνισμός της f(x), τότε ισχύει ότι f(x)=E΄(x) δηλαδή η Ε(χ) είναι η αντιπαράγωγος της f(x). Το εμβαδόν της $y=x^2$, υπολογίζεται από την $y=x^3/2$

Αυτό είναι το νόημα του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, ένα θεώρημα με τεράστια θεωρητική και πρακτική σημασία, για την αντίστροφη φύση του τετραγωνισμού και της κλίσης της καμπύλης, (έτσι μπορέσαμε να τετραγωνίσουμε καμπύλες), ανάλογη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στις πράξεις των αριθμών. Την «αντίστροφη « σχέση μεταξύ του τετραγωνισμού και του ρυθμού μεταβολής επιβεβαίωσε ανεξάρτητα και ο Λάιμπνιτς. Όπως ο Νεύτων κι' αυτός χρησιμοποίησε ένα γεωμετρικό σχήμα όπου εμπλέκονταν «απείρως μικρές» ποσότητες. Είναι το γνωστό θεώρημα του μετασχηματισμού του Λάιμπνιτς.(transmutation theorem) Τέτοια θεωρήματα μετασχηματισμού υπήρχαν πολλά κατά τον 17^{o} αιώνα, και έδειχναν ότι το εμβαδόν μιας περιοχής ήταν ίσο με μιας άλλης, ίσως απλούστερης .

Τα αποτελέσματα που παρέθεσα είναι τα θεμέλια του απειροστικού λογισμού, του λογισμού των απειροστών. Από τη δημοσίευση αυτών των μελετών αρχίζει μια εξαιρετική περίοδος μαθηματικής παραγωγικότητας. Οι αδελφοί Μπερνούλλι συνδέθηκαν με το Λάιμπνιτς και εγκολπώθηκαν τις ιδέες του. Το πρώτο εγχειρίδιο πάνω στο Λογισμό με απειροστά εμφανίστηε το 1696 (Ανάλυση των απειροστών) από το μαρκήσιο Ντε λ' Οπιτάλ, και η περίοδος μετά το 1670 ήταν ο απόλυτος θρίαμβος του απειροστικού λογισμού του Λάιμπνιτς έναντι άλλων αντίπαλων μεθόδων. Ακόμα και οι Άγγλοι αφού αντιστάθηκαν για κάποιο διάστημα στον σφετεριστή από την Ευρώπη, εν τούτοις μετά το 1800 άρχισαν να αποδέχονται τις μεθόδους και τους συμβολισμούς του Λάιμπνιτς ως περισσότερο ευέλικτους από του Νεύτωνα. Ο Απειροστικός λογισμός του Λάιμπνιτς παρά ο λογισμός των ροών του Νεύτωνα, μπήκε στο μικροσκόπιο της ανακατασκευής τους επόμενους αιώνες.

Γιώργος Μπαντές μαθηματικός

Σέρρες 2017