: η συνέπεια των γεωμετριών.

Ο Lobatschewsky στο βιβλίο του “ **η θεωρία των παραλλήλων**, αναπτύσσει τις συνέπειες του αξιώματός του, μέχρι να εξάγει με αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις, τις νέες σχέσεις της τριγωνομετρίας για το τυχόν τρίγωνο, παρουσιάζοντας για τον σκοπό αυτό τις 37 γνωστές προτάσεις του.

Στην πορεία αυτή δεν υπήρξε καμιά αντίφαση ανάμεσα στο νέο αξίωμα παραλληλίας του και στα υπόλοιπα αξιώματα της γεωμετρίας.

Είναι όμως πιθανόν ή λογική αυτή συνέπεια να ανατραπεί όταν προχωρήσουμε βαθύτερα στην ανάπτυξη της υπερβολικής γεωμετρίας και στην εξαγωγή άλλων συμπερασμάτων. Με την έννοια αυτή ποτέ δεν θα είμαστε βέβαιοι για την συνέπεια της νέας γεωμετρίας η οποία εμφανίζεται να υπάρχει τώρα αλλά πιθανόν δεν θα υπάρχει αύριο, ύστερα από νέες ανακαλύψεις.

Βέβαια το ίδιο ακριβώς μπορούμε να πούμε και για την γεωμετρία του Ευκλείδη. Είναι λογικά πιθανόν μια παραπέρα μελέτη της να αποκάλυπτε μια αντίφαση στη δομή της. Όμως η πιθανότητα αυτή είναι σχεδόν μηδενική. Η Ευκλείδεια γεωμετρία έχει διαδρομή δύο περίπου χιλιετηρίδων, έχει εφαρμοστεί πρακτικά, και αν υπήρχε αντίφαση αυτή θα είχε αποκαλυφτεί.

Δεν ισχύει το ίδιο για την υπερβολική γεωμετρία. Άλλωστε δεν μας συνηγορεί για την ορθότητά της η εμπειρία, απ’ την οποία είναι ξεκομμένη. Ας μην ξεχνούμε ότι οι θεμελιώδεις προτάσεις της δεν επετεύχθησαν απ’ την εμπειρική οδό αλλά ήταν καθαρά μαθηματικές κατασκευές. Δεν θα μπορούσαμε λοιπόν να περιμένουμε τουλάχιστον στις αρχές της διαδρομής της καμιά πρακτική της επαλήθευση όπως βέβαια και καμιά πρακτική της απόρριψη.

Έτσι οι περισσότεροι μαθηματικοί συνέχισαν να πιστεύουν ότι αν και ακόμα δεν είχαν αποκαλυφτεί ασυνέπειες στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες ήταν πολύ πιθανόν να αποκαλυφτούν ύστερα από διεισδυτικότερη σπουδή των συμπερασμάτων των γεωμετριών αυτών.

Η κατάσταση αυτή άλλαξε ύστερα απ’ το βιβλίο του Ιταλού μαθηματικού Beltrami : «**μια προσπάθεια ερμηνείας της μη**

Ευκλείδειας γεωμετρίας» στα 1868.Ο Beltrami απέδειξε ότι αν πάρουμε τις γεωδαισιακές μιας επιφάνειας με σταθερή αρνητική καμπυλότητα , όπως μιας ψευδοσφαίρας και τις θεωρήσουμε σαν ευθείες του διδιάστατου χώρου της επιφάνειας και επίσης ορίσουμε τις γωνίες και τα μήκη σύμφωνα με τις συνηθισμένες μεθόδους της διαφορικής γεωμετρίας τότε θεμελιώνουμε μια **εσωτερική γεωμετρία της επιφάνειας (**δηλαδή χωρίς αναφορά στον τρισδιάστατο περιβάλλοντα χώρο) στην οποία ισχύει η υπόθεση της οξείας γωνίας (το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών).

Έτσι ολόκληρη η γεωμετρία του Lobatschewsky θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν η εσωτερική γεωμετρία μιας επιφάνειας με σταθερή αρνητική καμπυλότητα όπου παράλληλες ευθείες θεωρούνται οι ασύμπτωτες γεωδαισιακές. Με τον τρόπο αυτό ο Beltrami έδειξε ότι η συνέπεια της Ευκλείδειας γεωμετρίας εξασφάλιζε την συνέπεια της υπερβολικής αφού μια ασυνέπεια στη δεύτερη θα «μεταφράζονταν» σε ασυνέπεια στη θεωρία των επιφανειών η οποία όμως βασίζεται στα Ευκλείδεια αξιώματα , αφού οι επιφάνειες θεωρούνται εμβαπτισμένες στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.

Κάθε ασυνέπεια λοιπόν στη μία γεωμετρία θα συνεπάγονταν ασυνέπεια στην άλλη.

Μια ανάλογη ερμηνεία μη Ευκλείδειας γεωμετρίας με αυτήν του Beltrami είναι η θεώρηση της **ελλειπτικής γεωμετρίας** σαν εσωτερική γεωμετρία της επιφάνειας της σφαίρας (Riemann) όπου οι μέγιστοι κύκλοι παίρνουν το ρόλο της «ευθείας» με ανάλογες θεωρήσεις για τις γωνίες και τα μήκη .

Οι «ερμηνείες» αυτές των Beltrami και Riemann που είναι "μεταφράσεις" της τρισδιάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας σε διδιάστατη υπερβολική και ελλειπτική αντίστοιχα απεκατέστησαν τη λογική ισοδυναμία των τριών γεωμετριών.

Από το σημείο αυτό αρχίζει η δική μας έρευνα.

Στις σελίδες που ακολουθούν θα παρουσιάσουμε στοιχεία απ' τα **Ευκλείδεια μοντέλα** της διδιάστατης ελλειπτικής και υπερβολικής γεωμετρίας στηριζόμενοι στην έννοια του **ισομορφισμού.** Θα μεταφέρουμε δηλαδή τις γεωμετρίες της ψευδοσφαιρικής και της σφαίρικής επιφάνειας πάνω στο γνωστό μας επίπεδο **(μοντέλα Poincare΄)** και τα σχήματα και οι έννοιες των γεωμετριών αυτών θα «μεταφραστούν» σε σχήματα και έννοιες της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Π.χ ένας Ευκλείδειος κύκλος θα παριστάνει μια υπερβολική ευθεία κλπ. Έτσι Ευκλείδεια θεωρήματα θα αποδεικνύουν υπερβολικά θεωρήματα. Με τα Ευκλείδεια μοντέλα λοιπόν θα καταλάβουμε καλύτερα τη **σχετικότητα της γεωμετρίας** πράγμα που είναι ο σκοπός του βιβλίου αυτού. Έτσι στο **κεφάλαιο 1** μελετώ έναν ισομορφισμό του Ευκλείδειου επιπέδου στον εαυτό του αφού εισάγω την έννοια της αντιστροφής η οποία χρησιμεύει στη δημιουργία του ισομορφισμού.. Με τον τρόπο αυτό φαίνεται η σχετικότητα των Ευκλείδειων σχημάτων: ένα σύστημα κύκλων συμπεριφέρεται όπως οι Ευκλείδειες ευθείες πληρώντας όλα τα αξιώματά τους.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο (ευθεία Riemann)** μελετούμε τον ισομορφισμό της σφαίρας στο επίπεδο ο οποίος παράγει την ελλειπτική γεωμετρία του επιπέδου , που αναπτύσσεται στο **τρίτο κεφάλαιο (Ευκλείδειο μοντέλο της ελλειπτικής γεωμετρίας)**.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο (Ευκλείδειο μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας)** αναπτύσσουμε τον ισομορφισμό της ψευδοσφαίρας στο επίπεδο παράγοντας την υπερβολική γεωμετρία στο επίπεδο.

Η αξιωματική βάση των νέων γεωμετριών θα παραμείνει η Ευκλείδεια, για λόγους ιστορικούς και για λόγους κατανόησης. Δηλαδή θα θεμελιώσουμε την υπερβολική γεωμετρία στο επίπεδο στηριζόμενοι στα 5 αξιώματα του Ευκλείδη, απλώς αλλάζοντας το πέμπτο. Ομοίως στην ελλειπτική. Θα δούμε ότι τα συστήματα που θα προκύπτουν είναι συνεπή.

Έχοντας λοιπόν τρεις γεωμετρίες στο γνωστό μας επίπεδο προκύπτει το πρόβλημα ποια απ’ αυτές είναι η «σωστή» γεωμετρία». Το πρόβλημα της **αλήθειας της γεωμετρίας** αναλύεται στο **πέμπτο κεφάλαιο** παρακολουθώντας την ιστορία του μέσα από τους μεγάλους διανοητές, απ’ τον Ευκλείδη ως τον Αινστάιν.

Γιώργ

ος Μπαντές

28/5/2002 Σέρρες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΟΥ

1. Αξιώματα   του Ευκλείδη

Η γεωμετρία , όπως είναι γνωστό ασχολείται με το χώρο, αφού καταστήσει σαφές τι είναι χώρος: «ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο ευθειών». Έτσι όταν αναφερόμαστε στην επιφάνεια μιας σφαίρας σαν ένα «χώρο», τα σημεία του χώρου αυτού είναι τα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας και οι ευθείες του, οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας.

Ο επίπεδος χώρος των δύο διαστάσεων , δηλ. το γνωστό μας επίπεδο περιγράφεται πλήρως απ' τη γεωμετρία του Ευκλείδη με σημεία και ευθείες τα γνωστά μας Ευκλείδεια σχήματα.

Τα σχήματα αυτά συμπεριφέρονται με έναν ορισμένο τρόπο, όπως τον περιέγραψε ο Ευκλείδης στα πέντε φημισμένα αξιώματά του που δεν είναι τίποτα άλλο παρά υποθέσεις για την συμπεριφορά των σημείων και των ευθειών του Ευκλείδειου χώρου. Το να ρωτάμε λοιπόν αν τα αξιώματα του Ευκλείδη ισχύουν στο χώρο ισοδυναμεί με το να ρωτάμε αν ο χώρος μας είναι Ευκλείδειος.

Τα αξιώματα του Ευκλείδη *είναι τα εξής:*

1. Υπάρχει ακριβώς μία ευθεία που διέρχεται από δύο διακεκριμένα σημεία.

2. Κάθε ευθεία γραμμή μπορεί να επεκταθεί έπ' άπειρον είναι ανοικτή. Για δύο τυχόντα σημεία της Α, Β υπάρχει πάντα ένα άλλο Γ ώστε το Β να είναι «μεταξύ» του Α και Γ. Η έννοια του «μεταξύ» λοιπόν, βασική για την Ευκλείδεια γεωμετρία.

3. Μπορούμε να σχεδιάσουμε έναν κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα. Το αξίωμα αυτό φαίνεται να μην έχει σχέση με τα σημεία και τις ευθείες. Όμως αν προσέξουμε τον Ευκλείδειο ορισμό του κύκλου «που είναι η γραμμή της οποίας όλα τα σημεία ισαπέχουν από ένα άλλο» θα δούμε ότι το αξίωμα αυτό εξασφαλίζει τη λειτουργία του διαβήτη. Με άλλα λόγια εξασφαλίζει ότι η «απόσταση» στο επίπεδο (χώρο) , όπως κι αν οριστεί, πρέπει να διασφαλίζει το αμετάβλητο του μήκους για ένα ευθύγραμμο τμήμα που μετακινείται από το ένα μέρος στο άλλο.

4. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες. Πάλι πρέπει να ξέρουμε τον Ευκλείδειο ορισμό της ορθής για να ερμηνεύσουμε το αξίωμα : «Όταν δύο τεμνόμενες ευθείες σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες ίσες τότε κάθε μια απ' αυτές είναι ορθή γωνία.» ΄Αρα το τέταρτο αξίωμα ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι οι ευθείες γραμμές δεν έχουν ζίγκ-ζάγκ, «σπάσιμο». Ας θυμηθούμε τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας και την ευθεία του επιπέδου.

5. Το διασημότερο αξίωμα στην ιστορία της επιστήμης: από ένα σημείο εκτός ευθείας μία μόνο παράλληλη άγεται προς αυτή. Παράλληλες είναι οι ευθείες του ίδιου επιπέδου που όσο κι αν προεκταθούν δεν τέμνονται.

Να λοιπόν η Ευκλείδεια ευθεία. Περιγράφεται απ' τα πέντε αυτά αξιώματα τα οποία θεμελιώνουν την Ευκλείδεια γεωμετρία. *Το ερώτημα που μπαίνει εδώ είναι:* ***η Ευκλείδεια ευθεία της καθημερινής μας εμπειρίας είναι η μοναδική γραμμή που πληροί τα παραπάνω αξιώματα; αν και ο κόσμος γύρω μας , μας εμποτίζει με μία ισχυρή διαίσθηση για το τι είναι ευθεία, μήπως η αξιωματική κατασκευή του***

Ευκλείδη μπορεί να ισχύσει και για μία άλλη γραμμή μετά από κατάλληλες αξιωματικές παραδοχές για το χώρο ; *Αν είναι έτσι, θα αρχίσει να κλονίζεται το απόλυτο* του *Ευκλείδειου χώρου.* Η σκέψη αυτή, δηλ. η αναζήτηση μίας άλλης γραμμής που να πληροί τα αξιώματα του Ευκλείδη και η διερεύνηση της συνέπειας αυτού του γεωμετρικού φαινομένου, μας οδηγεί στη μελέτη των σημειακών μετασχηματισμών και ειδικότερα της αντιστροφής, (inversion)

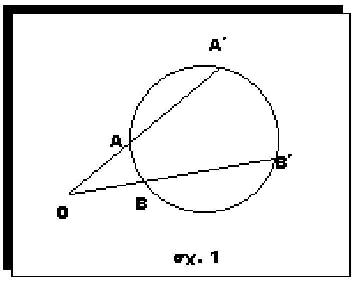
2. Αντιστροφή

Ονομάζεται επίπεδος σημειακός μετασχηματισμός κάθε αντιστοιχία βάσει της οποίας , σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου, αντιστοιχεί ένα άλλο σημείο Μ΄ του επιπέδου και μόνο ένα. Δηλ. ο μετασχηματισμός , είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του επιπέδου στον εαυτό του.

Ειδικότερα: δοθέντος ενός σταθερού σημείου Ο, και ενός πραγματικού αριθμού $\kappa \neq 0$, ονομάζεται **αντιστροφή** ο επίπεδος σημειακός μετασχηματισμός κατά τον οποίον σε κάθε σημείο Α του επιπέδου αντιστοιχεί σημείο Α΄ της ευθείας ΟΑ ώστε ΟΑ.ΟΑ΄ =κ Το σημείο Ο λέγεται πόλος αντιστροφής και το κ ακτίνα της αντιστροφής. Έτσι κάθε σημείο Α , διάφορο του Ο έχει ένα αντίστροφο (ομόλογο) ενώ μπορούμε συμβατικά να ορίσουμε ως αντίστροφο του πόλου Ο το σημείο Ο΄ , σε άπειρη απόσταση απ' το Ο.

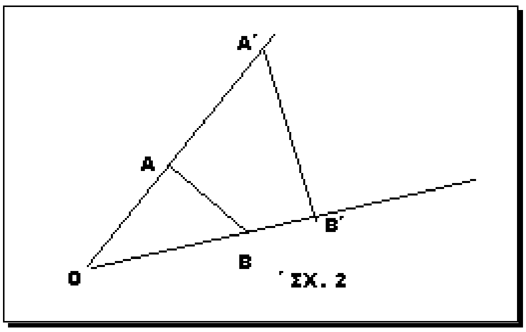
Η αντιστροφή είναι ,ένας επίπεδος σημειακός μετασχηματισμός . Εννοούμε ότι μ' αυτήν το επίπεδο απεικονίζεται στον εαυτό του, δηλ. αρχέτυπο και εικόνα είναι το ίδιο το επίπεδο το οποίο είναι και ο χώρος της έρευνας. **Άν το κ είναι θετικό η αντιστροφή λέγεται θετική και τα ομόλογα σημεία βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Ο ενώ αν κ αρνητικό η αντιστροφή λέγεται αρνητική και τα ομόλογα σημεία είναι εκατέρωθεν του Ο.**

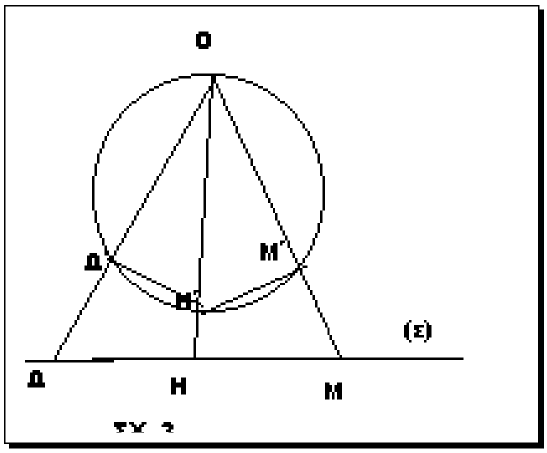
3. Χαρακτηριστική ιδιότης της αντιστροφής με κ>0



Έστω τα σημεία Α, Β και τα αντίστροφά τους Α΄ Β΄ ως προς την αντιστροφή (Ο ,ρ^2). **(σχ.1)** Τότε είναι ΟΑ.ΟΑ΄=ΟΒ.ΟΒ΄=ρ^2 άρα τα τέσσερα σημεία εφ' όσον δεν είναι συνευθειακά είναι ομοκυκλικά. Αντίστροφα , αποδεικνύεται εύκολα , ότι δύο σχήματα ,μεταξύ των οποίων υπάρχει μία απεικόνιση τέτοια ώστε δύο τυχόντα ζεύγη ομολόγων σημείων τους να είναι ομοκυκλικά, τότε τα σχήματα είναι ομόλογα σε μία αντιστροφή.

Ώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δύο σχήματα να είναι αντίστροφα , είναι δύο οποιαδήποτε ζεύγη ομολόγων σημείων τους μή συνευθειακά , να είναι ομοκυκλικά.





4. Απόσταση σημείων αντιστρόφων προς δοθέντα

Χωρίς να βλάψουμε τη γενικότητα θεωρούμε την ακτίνα της αντιστροφής ρ=1 **(σχ.2)** Είναι δηλ. ΟΑ.ΟΑ΄=ΟΒ.ΟΒ΄=1. Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑ΄Β΄ είναι όμοια.

Άρα

Α΄Β΄/ΑΒ=ΟΑ΄/ΟΒ⇒Α΄Β΄=ΑΒ.ΟΑ΄/ΟΒ=ΑΒ.ΟΑ΄ΟΑ/ΟΒ ΟΑ

=ΑΒ/ΟΑ.ΟΒ.

Τελικά **Α΄Β΄=ΑΒ/ΟΑ.ΟΒ ………..(4.1)**

Άν τα σημεία Α,Β, Α΄, Β΄ είναι συνευθειακά ο ίδιος τύπος ισχύει για την απόσταση των Α΄ , Β΄

5. Τα αντίστροφα ευθείας και περιφέρειας.

1. *Όταν η ευθεία διέρχεται απ' τον πόλο της αντιστροφής* τότε παραμένει αναλλοίωτη ως προς την αντιστροφή.(η αντίστροφη ευθεία είναι ο εαυτός της.)

Το αντίστροφο ευθείας που δεν διέρχεται απ' τον πόλο Ο, είναι περιφέρεια διερχόμενη απ' το Ο , απ' την οποία εξαιρείται ο πόλος Ο.

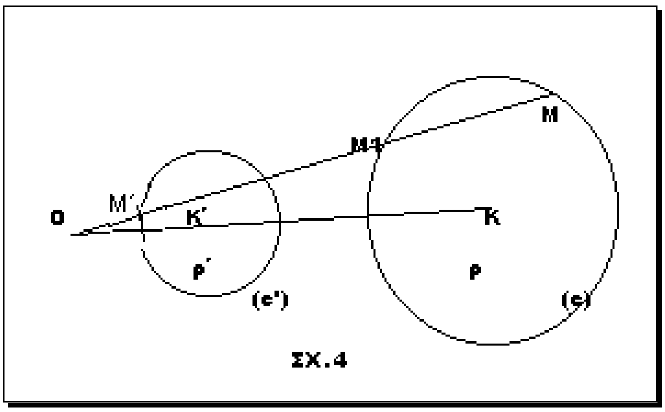
Απόδειξη.

Έστω Η **(σχ.3)** η προβολή του Ο στην (ε) και Η΄ το αντίστροφο του Η δηλ. ΟΗ.ΟΗ΄=ρ^2. Αν Μ τυχόν σημείο της (ε) με Μ΄ το αντίστροφό του τότε ως γνωστό τα Η, Η΄ ,Μ ,Μ΄ είναι ομοκυκλικά και επειδή Η=90^0 άρα Η΄Μ΄Μ=Η΄Μ΄Ο=90^0. Άρα το Μ΄ βρίσκεται σε κύκλο διαμέτρου ΟΗ΄.

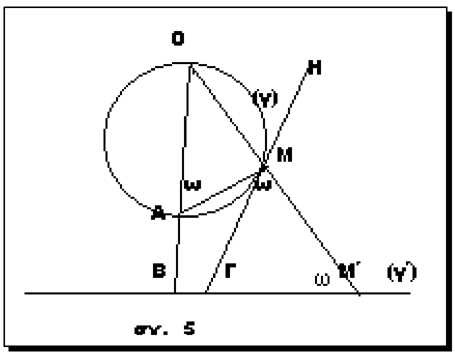
Αντίστροφα: Κάθε σημείο Δ΄ αυτής της περιφέρειας είναι το αντίστροφο του σημείου Δ που η ΟΔ΄ τέμνει την (ε), διότι προφανώς τα Δ,Δ΄,Η,Η΄ είναι ομοκυκλικά άρα τα ζεύγη ΔΔ΄, ΗΗ΄ είναι ομόλογα στην ίδια αντιστροφή.(Παρ, 3)

Επειδή σε μία αντιστροφή το κάθε σημείο απ' τα Μ ,Μ΄ είναι αντίστροφο του άλλου μπορούμε να πούμε ότι : Το αντίστροφο περιφέρειας , η οποία διέρχεται απ' τον πόλο αντιστροφής είναι ευθεία παράλληλη στην απ' το Ο εφαπτόμενη της περιφέρειας.

Το αντίστροφο περιφέρειας που δεν διέρχεται απ' το Ο. (σχ.4)



ΣΧ.4



σχ. 5

Αν Μ΄ το αντίστροφο του τυχόντος Μ της (c) στην αντιστροφή (O,ρ^2) ισχύει $OM.OM΄=\rho^2$. Όμως η ΟΜ ξανατέμνει την (c) στο M_1 και είναι $OM.OM_1=\delta$, όπου δ η δύναμη του πόλου Ο ως προς τον κύκλο (c). Διαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη είναι

$OM΄=(\rho^2/\delta)\ OM_1$.....(5.1).

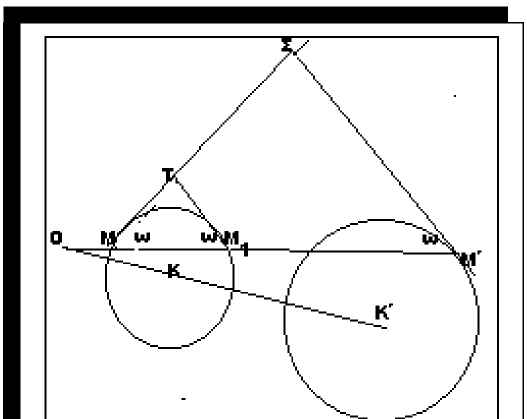
Τώρα το Μ΄ είναι ομόλογο του M_1 ως προς ομοιοθεσία, αφού η σχέση (2) ορίζει μία ομοιοθεσία , κέντρου Ο και λόγου ρ^2/δ, γνωστή απ' το λύκειο και έτσι το σύνολο των Μ΄ είναι περιφέρεια ομοιόθετη της (c).

6. Σύμμορφη απεικόνιση.(conformal)

Το ερώτημα που μπαίνει στο σημείο αυτό , είναι η ειδική σημασία που έχει η αντιστροφή για τους σημειακούς μετασχηματισμούς : **διατηρεί την γωνία δύο γραμμών κατά το μετασχηματισμό τους.** Είναι αυτό που ονομάζουμε σύμμορφη απεικόνιση. Στα παρακάτω λέγοντας γραμμή θα εννοούμε ευθεία ή περιφέρεια και γωνία δύο γραμμών την κυρτή γωνία που σχηματίζεται απ' τις εφαπτόμενες των γραμμών στο κοινό τους σημείο..

Πρόταση 1. *Η εφαπτόμενη μίας γραμμής (γ) σε σημείο της Μ διάφορο του πόλου Ο και η εφαπτόμενη της (γ΄) στο Μ΄ , ομόλογο του Μ ως προς την αντιστροφή , είναι συμμετρικές ως προς την μεσοκάθετη της* ΜΜ΄.

Α. έστω ότι αντίστροφες γραμμές είναι ευθεία και περιφέρεια **(σχ. 5).** Έστω ΓΜΗ η εφαπτόμενη της (γ) στο Μ ενώ η εφαπτόμενη της (γ΄) στο Μ΄ είναι η Μ΄Γ. Έχουμε για τις γωνίες ΓΜΜ΄=ΗΜΟ=ΟΑΜ=ΜΜ΄Β (το ΑΒΜΜ΄ εγγράψιμο) Άρα το ΓΜΜ΄ ισοσκελές....

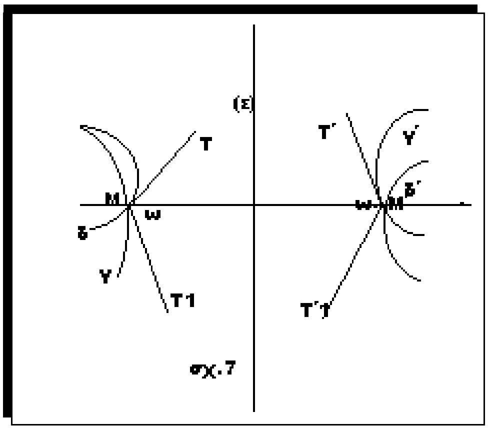


σχ.6

Β. Έστω οι αντίστροφες γραμμές είναι περιφέρειες **(σχ.6).**Ο πόλος αντιστροφής είναι συγχρόνως και κέντρο ομοιοθεσίας αυτών. Άρα η τέμνουσα απ' το Ο στις δύο περιφέρειες ορίζει τα M_1 , M΄ ομοιόθετα και τα M ,M΄ αντίστροφα σημεία. Οι

εφαπτόμενες στα ομοιόθετα σημεία M_1τ και Μ΄Σ είναι παράλληλες και έστω η Μτ^{I} εφαπτόμενη της περιφέρειας στο Μ. Επειδή οι γωνίες $M=M_1=M΄=ω$ το τρίγωνο ΣΜΜ΄ ισοσκελές άρα οι δύο εφαπτόμενες στα αντίστροφα σημεία Μ Μ΄ είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετη του ΜΜ΄

Πρόταση 2. *Διατήρηση των γωνιών κατά την αντιστροφή.* Η κυρτή γωνία δύο γραμμών (γ) και (δ) που τέμνονται στο Μ ισούται με τη γωνία των αντιστρόφων τους (γ΄) και (δ΄) που τέμνονται στο Μ΄ ομόλογο του Μ. **(σχ.7)**



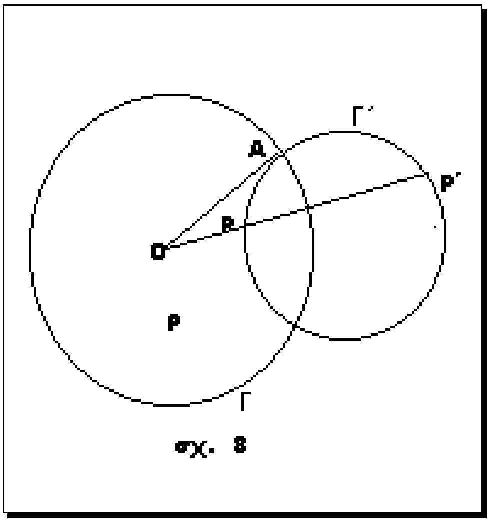
Το ζεύγος των εφαπτόμενων ΜΤ και MT_1 των (γ) και (δ) είναι σύμφωνα με την πρόταση 1 συμμετρικό ως προς την μεσοκάθετη του ΜΜ΄ των εφαπτόμενων των (γ΄) και (δ΄) δηλ. των Μ΄Τ΄ και Μ΄T_1΄. Επομένως οι κυρτές γωνίες αφού είναι συμμετρικές ως προς την (ε) είναι ίσες μεταξύ τους.

Πόρισμα 1: δύο γραμμές που τέμνονται ορθογώνια, μετασχηματίζονται μέσω αντιστροφής σε δύο γραμμές που τέμνονται ορθογώνια.

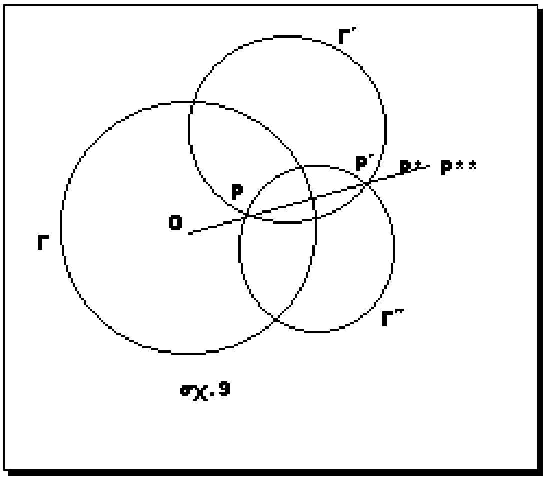
Πόρισμα 2: δύο γραμμές που εφάπτονται στο σημείο Μ μετασχηματίζονται με αντιστροφή σε δύο γραμμές που εφάπτονται στο Μ΄ αντίστροφο του Μ.

7, Κατοπτρισμόςκαι ιδιότητες.

Όταν μια αντιστροφή έχει σαν πόλο το κέντρο ενός κύκλου Γ (Ο,ρ) και ακτίνα αντιστροφής το $ρ^2$ τότε η αντιστροφή λέγεται κατοπτρισμός (Ο,$ρ^2$). Δηλ. ισχύει ΟΑ.ΟΑ΄ =$ρ^2$ όπου τα συζυγή σημεία (κατοπτρικά) είναι μέσα και έξω απ' τον κύκλο



σχ. 8



σχ.9

αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι η εικόνα κάθε σημείου της Γ και άρα η εικόνα της περιφέρειας Γ είναι η ίδια η Γ. Επίσης η εικόνα περιφέρειας που δεν διέρχεται απ' το Ο είναι περιφέρεια αφού ο κατοπτρισμός είναι αντιστροφή.

Πρόταση 1.Έστω τα Ρ ,Ι κατοπτρικά σημεία ως προς τον κατοπτρισμό (Ο,$ρ^2$). Τότε κάθε κύκλος που περνάει απ' τα Ρ ,Ι είναι ορθογώνιος στον (Ο,ρ). **(σχ.8)**

Πράγματι απ' το σχήμα έχουμε ΟΡ.ΟΙ=$ΟΑ^2$=$ρ^2$. Αυτό σημαίνει ότι η ΟΑ είναι εφαπτόμενη του κύκλου Γ' .Άρα Γ$\perp$Γ΄.

Πρόταση 2. Δύο τεμνόμενοι κύκλοι οι Γ΄ και Γ΄΄ που είναι ορθογώνιοι στον ίδιο κύκλο Γ , τέμνονται στα σημεία Ρ και Ρ΄ που είναι κατοπτρικά ως προς τον κύκλο Γ**. (σχ.9)**

Πράγματι φέρουμε την ΟΡ όπου Ρ εσωτερικό σημείο τομής των Γ΄,Γ΄΄. Ας υποθέσουμε ότι η ΟΡ τέμνει τους Γ΄, Γ΄΄ σε διαφορετικά σημεία τα $Ρ^*$ και $Ρ^{**}$. Αφού οι Γ΄ Γ΄΄ ορθογώνιοι στον Γ είναι $ΟΡ.ΟΡ^*=ρ^2=ΟΡ.ΟΡ^{**}$. Άρα $Ρ^*\equiv Ρ^{**}\equiv Ρ$. Η ταυτότητα αυτή αποδεικνύει την πρόταση.

Πρόταση 3. Σε μία αντιστροφή (Λ,κ) σημεία κατοπτρικά ως προς κύκλο Γ μετασχηματίζονται σε σημεία κατοπτρικά ως προς την εικόνα του κύκλου Γ, μέσω της αντιστροφής. **(σχ. 9)**

Απόδειξη: Έστω τα P P΄ κατοπτρικά ως προς τον κύκλο Γ. Σχεδιάζω δύο βοηθητικούς κύκλους Γ΄ Γ΄΄ που να διέρχονται απ' αυτά. Σύμφωνα με την πρόταση 1 οι κύκλοι αυτοί είναι ορθογώνιοι στον κύκλο Γ. Αν οι Γ, Γ΄ ,Γ΄΄ δεν διέρχονται απ' τον πόλο του κατοπτρισμού Ο, οι εικόνες τους θα είναι ως γνωστό κύκλοι Κ, Κ΄ ,Κ΄΄ και λόγω της διατηρήσεως των γωνιών στην αντιστροφή (σύμμορφη απεικόνιση) οι κύκλοι Κ΄ Κ΄΄ θα είναι ορθογώνιοι στον Κ. Τα σημεία P, P΄ σημεία τομής των Γ΄, Γ΄΄ μετασχηματίζονται στα Ζ ,Ζ΄, σημεία τομής των Κ΄ Κ΄΄. Άρα απ' την πρόταση 2 τα Ζ, Ζ΄ είναι κατοπτρικά σημεία ως προς τον Κ πράγμα που αποδεικνύει την πρόταση.

Είναι φανερό ότι η πρόταση 3 ισχύει και για την περίπτωση κύκλων με άπειρη ακτίνα (δηλ ευθειών).

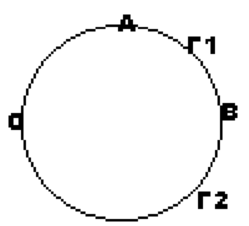
Η αντιστροφή *είναι ο καταλληλότερος σημειακός μετασχηματισμός για να πετύχουμε ισομορφισμούς που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.. Περισσότερες λεπτομέρειες και επί πλέον ιδιότητες για την αντιστροφή μπορούμε να βρούμε στη γεωμετρία του Κανέλλου καθώς και στη γεωμετρία των Ιησουιτών.*

8. Ένα παράδειγμα ισομορφισμού : η «ιδανική γεωμετρία»

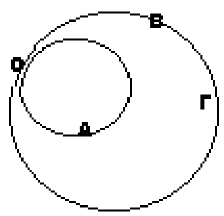
Είναι γνωστό απ' τη θεωρία των επιφανειών ότι δύο επιφάνειες E_1 και E_2 ονομάζονται ισομορφικές όταν είναι δυνατόν να οριστεί μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του συνόλου των σημείων της E_1 πάνω στα σημεία της E_2 έτσι ώστε κάθε «ευθεία» της E_1 να απεικονιστεί σε μία «ευθεία» της E_2. Τότε οι γεωμετρίες των δύο επιφανειών ταυτίζονται: κάθε πρόταση της μίας (της γεωμετρίας της E_1) ισχύει και στην άλλη (στη γεωμετρία της E_2). Θα μελετήσουμε το φαινόμενο του ισομορφισμού θεωρώντας σαν E_1 και E_2 το γνωστό μας επίπεδο (ισομορφισμός του επιπέδου στον εαυτό του) και χρησιμοποιώντας σαν απεικόνιση τη γνωστή μας πια αντιστροφή (Ο,1), **διερευνώντας πάντα το ερώτημα της παραγράφου 1 , για το αν η αξιωματική βάση του Ευκλείδη μπορεί να ισχύσει και για άλλη γραμμή , πέραν της Ευκλείδειας**. Επειδή το αντίστροφο κάθε ευθείας που δεν διέρχεται απ' τον πόλο της αντιστροφής Ο είναι κύκλος που διέρχεται απ' το Ο, θεωρούμε για την νέα γεωμετρία που θα περιγράψουμε , το σύνολο των κύκλων οι οποίοι διέρχονται απ΄ το Ο τους οποίους θα ονομάζουμε **ιδανικές ευθείες** ή απλώς **«ευθείες»** , καθώς και το σύνολο των σημείων του επιπέδου **εκτός** του Ο τα **ιδανικά σημεία ή "σημεία".** Είναι ο ''χώρος'' της ιδανικής γεωμετρίας Δηλ. τα σημεία και οι ευθείες του ιδανικού επιπέδου είναι οι εικόνες των αντίστοιχων του Ευκλείδειου επιπέδου μέσω της αντιστροφής (Ο,1) και τα "σημεία" καθώς και οι "ευθείες" θα πάρουν τώρα ιδιότητες απ' τα **αρχέτυπα σημεία και ευθείες** μέσω της αντιστροφής δηλ. τα Ευκλείδεια σημεία και ευθείες. Προσποιούμενοι λοιπόν ότι οι κύκλοι απ' το Ο είναι οι ευθείες μας θα εξετάσουμε την ισχύ των αξιωμάτων του Ευκλείδη.

9. Η ιδανική γεωμετρία και τα αξιώματα του Ευκλείδη.

Απ' τον ορισμό των ιδανικών ευθειών , προκύπτει ότι αν δοθούν δύο ιδανικά σημεία Α, Β **(σχ. 10)** υπάρχει μία μόνο " ευθεία" που περνάει απ' αυτά, αφού τρία σημεία ορίζουν ένα μόνο κύκλο και έτσι το **πρώτο αξίωμα του Ευκλείδη ισχύει για την ιδανική γεωμετρία.** Σαν "γωνία" δύο "ευθειών" ορίζουμε τη γωνία των αντίστοιχων ευθειών , των εικόνων των δύο κύκλων , μέσω της αντιστροφής, αφού η γωνία των καμπύλων διατηρείται με την αντιστροφή.



ΣΧ. 10

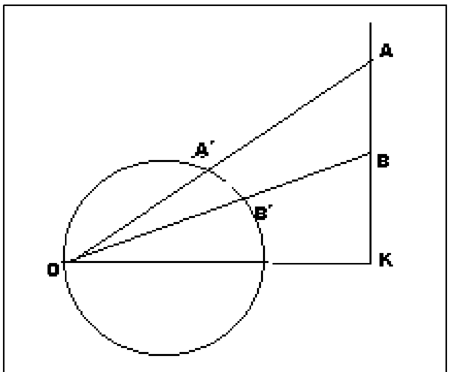


ΣΧ. 11

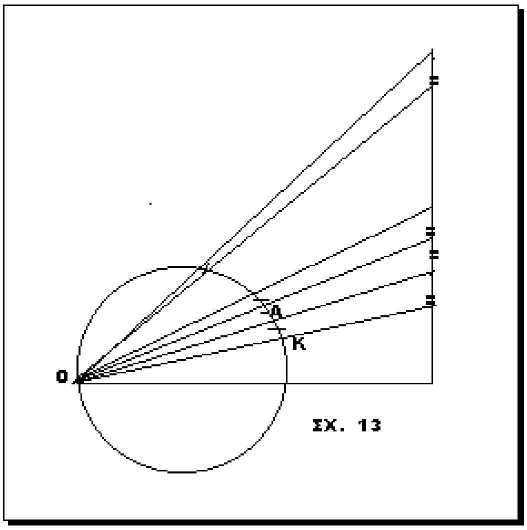
Ορισμός παραλλήλου.

Αν δοθεί μία ιδανική ευθεία ΒΓ και ένα ιδανικό σημείο Α εκτός αυτής ορίζουμε σαν παράλληλη "ευθεία" προς τη ΒΓ έναν κύκλο που εφάπτεται τον δοθέντα ΟΒΓ στο Ο και περνάει απ' το Α **(σχ.11).** Πράγματι οι δύο "ευθείες" δεν έχουν κανένα κοινό "σημείο" αφού το Ο δεν είναι ιδανικό σημείο. Επίσης είναι προφανές ότι ο δεύτερος κύκλος είναι μοναδικός , **άρα στην ιδανική γεωμετρία ισχύει το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη.**

Ορισμός της απόστασης.



ΣΧ. 12



ΣΧ. 13

Ορίζουμε σαν ιδανική απόσταση μεταξύ των ιδανικών σημείων Α΄, Β΄ (σχ.12) την απόσταση των αρχέτυπων των Α΄ ,Β΄ πάνω στην Ευκλείδεια ευθεία-αρχέτυπο μέσω της αντιστροφής,

δηλ ιδανική απόσταση(Α΄Β΄)=ΑΒ ……………(9.1)

Όπως είναι γνωστό απ' την παράγραφο 4 είναι ΑΒ=Α΄Β΄/ΟΑ΄.ΟΒ΄

Άρα ιδανικό μήκος του Α΄Β΄ ισούται με το λόγο Α΄Β΄/ΟΑ΄.ΟΒ΄. Ας καταλάβουμε εδώ κάτι: το Α΄Β΄/ΟΑ΄.ΟΒ΄ δεν είναι το ευκλείδειο μήκος του τόξου ΑΒ, απλώς συμφωνούμε να το ονομάζουμε μήκος του, είναι το ιδανικό μήκος , το "μήκος". **Είναι ο νέος ορισμός της απόστασης**.

Έτσι πετυχαίνουμε ώστε δύο ιδανικά τμήματα να είναι "ίσα" όταν τα αρχέτυπά τους ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα. Τα ίσα στο Ευκλείδειο επίπεδο παραμένουν ίσα στο ιδανικό επίπεδο. Αυτό είναι βασική προϋπόθεση του ισομορφισμού.

Η πρώτη απαίτηση της απόστασης είναι:

“απόσταση”ΑΒ=”απόσταση”ΑΓ +”απόσταση”ΓΒ όταν το Γ είναι ενδιάμεσο σημείο του ΑΒ , πράγμα που εύκολα αποδεικνύεται.

Η εξασφάλιση του “μεταξύ” σχετίζεται με την εξαίρεση του Ο απ’ τα ιδανικά σημεία του ιδανικού επιπέδου. Πράγματι σε μία Ευκλείδεια ευθεία ΑΒ, λέμε ότι το Γ βρίσκεται ανάμεσα στα Α και Β , αν καθώς διατρέχουμε την ΑΒ απ’ το Α προς το Β περνούμε απ’ το Γ. Αν στην ιδανική ευθεία του σχήματος 10 δεν εξαιρούσαμε το σημείο Ο τότε και το $Γ_2$ και το $Γ_1$ θα βρίσκονταν μεταξύ των Α και Β . Άρα με την κατασκευή μας εξασφαλίζουμε τα αξιώματα διατάξεως που σχετίζονται με το δεύτερο αξίωμα του Ευκλείδη.

Το 2_0 και το 4_0 αξίωμα του Ευκλείδη.

Ο ορισμός που δώσαμε για την απόσταση των Α, Β παρουσιάζει απ’ το **σχήμα 13** το εξής παράδοξο: Αν θεωρήσω πάνω στην ιδανική ευθεία το τμήμα ΚΑ σαν μονάδα της μέτρησης των αποστάσεων τότε η μονάδα αυτή θα μικραίνει όσο θα μετακινείται προς τον πόλο Ο ενώ τα “τμήματα” που θα ορίζει θα παραμένουν “ίσα”. Έτσι στο **σχήμα 13** θα χρειάζονται άπειρα τέτοια τμήματα για να φτάσουμε απ’ το Κ στο Ο πράγμα που θέτει σε ισχύ το δεύτερο αξίωμα του Ευκλείδη: το “μήκος” της ιδανικής γραμμής είναι άπειρο και δεν υπάρχει τελευταίο σημείο πάνω σ’ αυτήν: είναι μία ανοικτή γραμμή.

Όσον αφορά το τέταρτο αξίωμα : αφού με την αντιστροφή οι γωνίες διατηρούνται, ό,τι ισχύει για τις ορθές στο Ευκλείδειο επίπεδο ισχύει και για τις ιδανικές ορθές: δηλ. το τέταρτο αξίωμα ισχύει.

Σχετικά με το 3_0 αξίωμα.

Το τρίτο αξίωμα όπως είδαμε απαιτεί , το μήκος ευθυγράμμου τμήματος να παραμένει αναλλοίωτο οπωσδήποτε κι’ αν μετατοπιστεί το τμήμα πάνω στο επίπεδο. Ας ξεκαθαρίσουμε στο σημείο αυτό την έννοια της επίπεδης μετατόπισης:

Δύο σχήματα του επιπέδου, τα Σ και Σ΄ λέγονται ίσα όταν μπορούν να συμπέσουν. **Επίπεδη μετατόπιση** είναι ο επίπεδος σημειακός μετασχηματισμός που φέρνει το σχήμα Σ πάνω στο Σ΄ , δηλ. κάποια νοητή κίνηση του σχήματος Σ **πάνω στο επίπεδο** ώσπου να συμπέσει στο Σ΄. Είναι προφανές ότι κάθε επίπεδη μετατόπιση είναι μεταφορά ή στροφή ή και τα δύο. Όμως η μεταφορά και η στροφή , αποδεικνύεται εύκολα ότι μπορούν να αναλυθούν με άπειρους τρόπους σε δύο αξονικές συμμετρίες. **Άρα κάθε επίπεδη μετατόπιση μπορεί να αναλυθεί με άπειρους τρόπους σε δύο διαδοχικές αξονικές συμμετρίες.** (Γεωμετρία Κανέλλου).

Ειδικότερα για την αξονική συμμετρία ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Α. Το γινόμενο δύο αξονικών συμμετριών με άξονες παράλληλους είναι μεταφορά.

Β. Κάθε μεταφορά μπορεί να αναλυθεί με άπειρους τρόπους σε γινόμενο δύο αξονικών συμμετριών με παράλληλους άξονες.

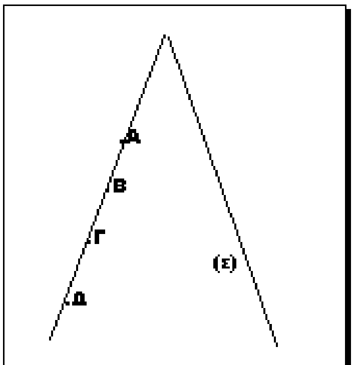
Γ. Το γινόμενο δύο αξονικών συμμετριών με άξονες που τέμνονται στο Ο είναι στροφή κέντρου Ο και γωνίας διπλάσιας της γωνίας των αξόνων.

Δ. Κάθε στροφή κέντρου Ο, μπορεί να αναλυθεί με άπειρους τρόπους σε γινόμενο δύο αξονικών συμμετριών κ.λ.π. (Γεωμετρία Κανέλλου.)

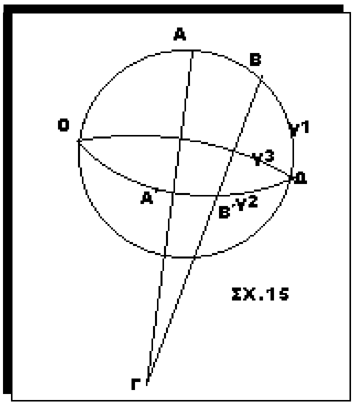
Ύστερα απ' τα παραπάνω ας δούμε πιο προσεκτικά το πρόβλημα της μετατόπισης ενός τμήματος πάνω στο επίπεδο στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

Για την μετατόπιση του ΑΒ του σχήματος 14 υπάρχουν δύο περιπτώσεις. Πρώτον να μετακινηθεί σε μία άλλη θέση ΓΔ της ίδιας ευθείας (μεταφορά) και δεύτερον σε μία άλλη θέση μίας άλλης ευθείας (ε) (στροφή και μεταφορά)

Και στις δύο περιπτώσεις η Ευκλείδεια γεωμετρία εξασφαλίζει το αναλλοίωτο του μήκους με την γεωμετρική κατασκευή της αξονικής συμμετρίας. Στην πρώτη περίπτωση με άξονα κάθετο στο μέσο της ΒΓ και μία δεύτερη με άξονα κάθετο στο μέσο του ΓΔ για να φέρει τα σημεία στις ίδιες με πριν σχετικές θέσεις. Στη δεύτερη περίπτωση με άξονα την διχοτόμο των (ε) και ΑΒ και την μεταφορά πάνω στην (ε) όπως πριν.



ΣΧ. 14



ΣΧ.15

Το πρόβλημα λοιπόν για την ιδανική μας γεωμετρία είναι να ορίσουμε την ιδανική μετατόπιση και ειδικότερα την ιδανική αξονική συμμετρία που είναι η τελική αναγωγή της μετατόπισης.

Για τον σκοπό αυτό θα δώσουμε την ακόλουθη πρόταση:

Ιδανική συμμετρία ως προς "ευθεία"

Η αντιστροφή (κατοπτρισμός) ως προς οποιονδήποτε κύκλο του συστήματος ορίζεται σαν ιδανική αξονική συμμετρία ως προς άξονα την «ευθεία» που συμπίπτει με τον κύκλο της αντιστροφής.

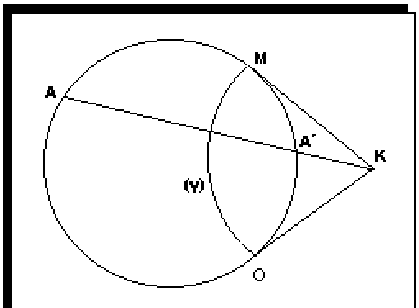
Οι ιδιότητες της ιδανικής συμμετρίας είναι οι ακόλουθες:

1. **Η ιδανική συμμετρία απεικονίζει τα ιδανικά σημεία σε ιδανικά σημεία .**

2. **Η ιδανική γραμμή που συνδέει το σημείο Α και το συμμετρικό του Α΄ είναι κάθετη στον άξονα συμμετρίας που συμπίπτει με τον κύκλο της αντιστροφής επί πλέον δε το τμήμα ΑΑ΄ διχοτομείται από τον κύκλο της αντιστροφής.**

Απόδειξη.

Έστω K το κέντρο τυχόντος κύκλου (γ) του συστήματος και A ,A΄ αντίστροφα σημεία ως προς τον κύκλο αυτόν. **(σχ. 16)**



ΣΧ.16

Τότε ο κύκλος OAA΄ είναι ορθογώνιος προς τον κύκλο της αντιστροφής (Παρ. 7, πρότ. 1). Με άλλα λόγια μία τέτοια αντιστροφή μεταφέρει το σημείο A στο A΄ πάνω στην ιδανική γραμμή που είναι κάθετη στον κύκλο της αντιστροφής. Επίσης το ιδανικό τμήμα AA΄ διχοτομείται απ' τον κύκλο αυτόν αφού τα ιδανικά μήκη των AM και A΄M ταυτίζονται, (Παρ. 9 πρότ. 1). Η κατάσταση αυτή μας θυμίζει την αξονική Ευκλείδεια συμμετρία .

Στη συνέχεια θεωρούμε ένα «τμήμα» AB που το αντίστροφό του ως προς κάποιο κύκλο του συστήματος είναι το A΄B΄ (σχ. 15). Είναι φανερό ότι αν τα δύο τμήματα προεκταθούν, τέμνονται πάνω στον κύκλο της αντιστροφής, σχηματίζοντας ίσες γωνίες μ' αυτόν. Τα ιδανικά τμήματα AA΄ και BB΄ είναι κάθετα στον κύκλο της αντιστροφής και διχοτομούνται από αυτόν όπως δείξαμε παραπάνω.

3 Η ιδανική απόσταση είναι αναλλοίωτη κατά την ιδανική συμμετρία.

Απόδειξη

Κατ' αρχήν κάθε τέτοια αντιστροφή μετασχηματίζει έναν κύκλο του συστήματος σε κύκλο του συστήματος (παράγ. 7) (σχ. **15)** **α**φού η εικόνα του Ο είναι ο εαυτός του (*αν ο κύκλος του διέρχεται απ' το κέντρο κατοπτρισμού τότε μετασχηματίζεται σε ευθεία απ' το Ο που θεωρείται κύκλος με άπειρη ακτίνα δηλ. κύκλος του συστήματος)* Έστω λοιπόν ότι το "τμήμα" ΑΒ μεταφέρεται στο τμήμα Α΄Β΄. Οι δύο κύκλοι τέμνονται στο Δ, όπου ο κύκλος της αντιστροφής συναντά τον ΟΑΒ. Τότε

$$\frac{\text{ιδαν. μήκος ΑΔ}}{\text{ιδαν. μήκος Α΄Δ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΟΑ.ΟΔ}} / \frac{\text{Α΄Δ}}{\text{ΟΑ΄.ΟΔ}} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{Α΄Δ}} . \frac{\text{ΟΑ΄}}{\text{ΟΑ}}$$

Αλλά απ' την ομοιότητα των τριγώνων ΓΑΔ , ΓΑ΄Δ και ΟΑΓ ,ΟΑ΄Γ έχουμε

ΑΔ/Α΄Δ=ΓΑ/ΓΔ=ΓΑ/ΓΟ=ΟΑ/ΟΑ΄ ……… **(9.2**)

Άρα ιδανικό μήκος ΑΔ =ιδανικό μήκος Α΄Δ, Ομοίως ισχύει: ιδαν. μήκος ΒΔ= ιδαν. μήκος ΒΔ΄ άρα αφαιρώντας έχουμε ιδαν. μήκοςΑΒ =ιδαν. μήκος Α΄Β΄.

(η απόδειξη αυτή αναφέρεται στο υπόμνημα του Wellstein, που υπάρχει στο Enkyklopadie der Elementer -Mathematic)

Βλέπουμε λοιπόν ότι η **ιδανική συμμετρία** έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με την Ευκλείδεια αξονική συμμετρία. Όσον αφορά την **ιδανική μετατόπιση** αρκεί να επισημάνουμε ότι μπορεί με εύκολες γεωμετρικές κατασκευές να αναχθεί σε κατάλληλες ιδανικές συμμετρίες εξασφαλίζοντας έτσι το αναλλοίωτο του «μήκους» του ιδανικού τμήματος.

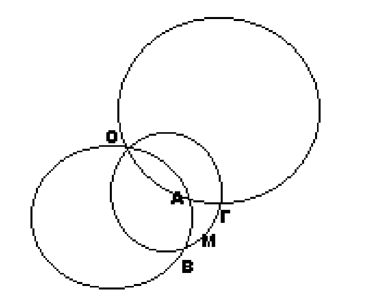
Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι , στο ιδανικό επίπεδο, τυχούσα μετατόπιση του ιδανικού τμήματος δεν μεταβάλει το « μήκος» του και επομένως θέτουμε σε ισχύ για την ιδανική γεωμετρία το 3_0 αξίωμα του Ευκλείδη

10.Μετατροπές.

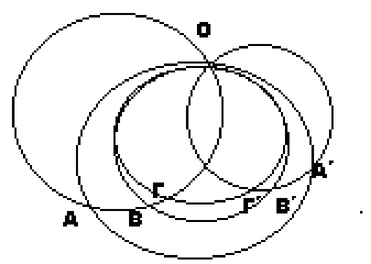
Έτσι στο ιδανικό επίπεδο, στο χώρο των δύο διαστάσεων, της ιδανικής γεωμετρίας, ισχύουν τα πέντε αξιώματα του Ευκλείδη για τις ιδανικές του ευθείες, επομένως η γεωμετρία του θα είναι ταυτόσημη με την Ευκλείδεια. Δηλαδή κάθε πρόταση της Ευκλείδειας θα μεταφέρεται στην ιδανική με μία απλή αλλαγή των λέξεων ή με την τοποθέτηση εισαγωγικών. Αλλά στη συνέχεια κάθε πρόταση της ιδανικής γεωμετρίας θα μπορεί να αποδοθεί σαν Ευκλείδεια πρόταση, στο σύστημα των κύκλων που διέρχονται απ' το Ο. Το σύστημα της μετατροπής των προτάσεων θα είναι κάπως έτσι:

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ	**ΙΔΑΝΙΚΗ**	**ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΥΚΛΩΝ**
Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι π	Το άθροισμα των γωνιών «τριγώνου» είναι π	Στο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 18) το άθροισμα των γωνιών είναι π.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα.	Στο ορθογώνιο «τρίγωνο» (σχ.18) είναι «ΑΒ»^{2} + «ΑΓ»^{2} = «ΒΓ»^{2}	Στο σχήμα 18 είναι (ΑΒ^2/ΟΑ^{2}ΟΒ^2)+ (ΑΓ^2/ΟΑ^{2}ΟΓ^2) =ΒΓ^2/ΟΒ^{2}ΟΓ^2.
Κάθε τμήμα έχει ένα μέσον.	Κάθε «τμήμα» έχει ένα μόνο «μέσον».	Για κάθε τόξο ΒΓ του σχ. 18 υπάρχει ένα μόνο σημείο Μ τέτοιο ώστε ΒΜ/ΟΒ.ΟΜ=ΓΜ/ΟΓ.ΟΜ.
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος απ' την ορθή είναι το μισό της υποτείνουσας	Σε κάθε ορθογώνιο «τρίγωνο» η «διάμεσος» απ' την ορθή είναι το μισό της «υποτείνουσας»	Σε κάθε ορθογώνιο ΑΒΓ υπάχει ένα Μ στην ΒΓ ώστε ΒΜ/ΟΒ.ΟΜ=ΜΓ/ΟΜ.ΟΓ και ΑΜ/ΟΑ.ΟΜ== 1/2ΒΓ/ΟΒ.ΟΓ
Θεώρημα του	Θεώρημα του	Στο σχ. 17

Θαλή.	Θαλή για παράλληλες «ευθείες»	ισχύει ΑΒ.ΟΓ/ΟΑ.ΒΓ= Α΄Β΄.ΟΓ΄/ΟΑ΄ΒΓ΄


σχ.18

Έτσι μέσω της ιδανικής γεωμετρίας και του ισομορφισμού, ανακαλύπτουμε σχέσεις στο σύστημα των κύκλων που μας είναι άγνωστες, αλλά και αντίστροφα από σχέσεις του συστήματος των κύκλων μπορούμε να παράγουμε Ευκλείδειες σχέσεις στο επίπεδο. Αυτό θα είχε ενδιαφέρον αν η γεωμετρία του επιπέδου δεν ήταν Ευκλείδεια και κατασκευάζονταν μία ιδανική γεωμετρία που θα συνέδεε αυτήν την άγνωστη γεωμετρία με κάποιο π.χ. σύστημα κύκλων, Τότε θα μπορούσαμε να παράγουμε θεωρήματα αυτής της άγνωστης γεωμετρίας.


ΣΧ. 17

Αυτό γίνεται στην περίπτωση της υπερβολικής γεωμετρίας του Lobatschewsky καθώς και της ελλειπτικής γεωμετρίας του Riemann.

Η ιδανική γεωμετρία των προηγούμενων κατασκευών είναι μία αναπαράσταση της Ευκλείδειας διδιάστατης γεωμετρίας , με την γεωμετρία ενός συστήματος κύκλων που διέρχονται όλοι από ένα σταθερό σημείο. **Η διδακτική της αξία βρίσκεται στο γεγονός ότι μπορέσαμε να κατασκευάσουμε ένα συνεπές γεωμετρικό σύστημα και μάλιστα το γνωστό μας Ευκλείδειο, αλλάζοντας την ευθεία και το σημείο , δηλαδή την εικόνα μας για το χώρο.**

Επανερχόμενοι στο ερώτημα που θέσαμε στην παράγραφο 1 , έχουμε να παρατηρήσουμε ότι με την ιδανική γεωμετρία εμφανίζεται για πρώτη φορά μία φανερή διάσταση ανάμεσα στη λογική και στην διαίσθηση. Η διάσταση αυτή θα κορυφωθεί στις **μη Ευκλείδειες γεωμετρίες** και η ιδανική γεωμετρία είναι η αρχή της. Αν ο Καντ γνώριζε τις κατασκευές της ιδανικής γεωμετρίας που αναπτύξαμε όταν έγραφε για την *προεμπειρική σύνθεση της γεωμετρίας του Ευκλείδη για το ιδεατό σχήμα του νοητικού μας οργάνου* κλπ (γύρω στα 1780) θα τις λάβαινε σίγουρα υπ' όψη του

Πράγματι ο κόσμος μας δεν μπορεί να μοιάζει με το ιδανικό επίπεδο. Τα ελεύθερα σώματα δεν κινούνται σε κύκλους ούτε υπάρχει κάποιο απροσπέλαστο σημείο δίπλα μας. Όμως αυτός ο κόσμος που μόνο σε φανταστικές φυσικές αιτίες μπορεί να αποδοθεί, έχει Ευκλείδεια χαρακτηριστικά.

Την διάσταση αυτή μεταξύ της μαθηματικής λογικής και της διαίσθησης όπως αναφέρθηκε θα την παρακολουθήσουμε στην συνέχεια στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.